DERIVATA DI UNA FUNZIONE

RAPPORTO INCREMENTALE

Sia $y = f(x)$ una funzione reale definita in un intervallo $[a;b]$ e sia $P(x_0; f(x_0))$ un punto del grafico della funzione, con la condizione che x_0 sia un valore interno all'intervallo, cioè $a < x_0 < b$. Indicato con **h** un numero positivo o negativo in modo che sia verificata la condizione $x_0 + h \in [a;b]$, si dice che si è dato alla variabile **x** l'incremento **h.**

Graficamente si ha:

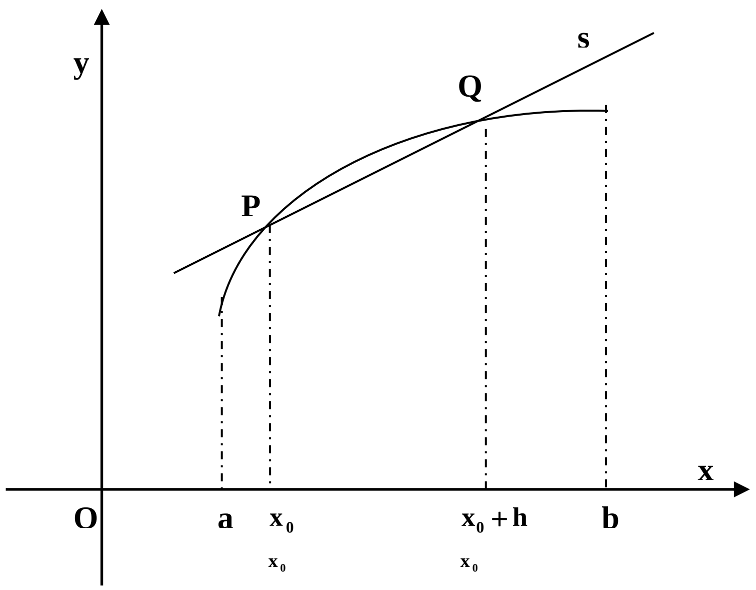

Figura 1

Si dice rapporto incrementale della funzione $y = f(x)$ relativo al punto di ascissa x_0 e all'incremento h la quantità:

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

E precisamente si chiama rapporto incrementale destro se $h > 0$, mentre si dice rapporto incrementale sinistro se $h < 0$.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL RAPPORTO INCREMENTALE

Ricordando che il coefficiente angolare di una retta è il rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualunque della retta, cioè

$$\mathbf{m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}} \ ,$$

e prendendo in considerazione i due punti $\mathbf{P(x_0; f(x_0))}$ e $\mathbf{Q(x_0 + h; f(x_0 + h))}$, punti d'intersezione della curva con la retta secante s (vedi figura 1), risulta che:

$$\mathbf{m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \ .$$

Ossia:

il rapporto incrementale di una funzione nell'intorno di un suo punto è il coefficiente angolare della retta secante passante per il punto dato e per il punto di ascissa incrementata.

DERIVATA DI UNA FUNZIONE IN UN SUO PUNTO

Chiamasi derivata della funzione $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale della funzione al tendere a zero dell'incremento h della variabile,
ossia :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \; .$$

La derivata della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0 si suole indicare con una qualunque delle seguenti notazioni:

$$y'(x_0) \quad , \quad f'(x_0) \quad \text{oppure} \quad \dot{f}(x_0) \, .$$

La derivata (prima) $f'(x_0)$ della funzione $y = f(x)$ è quindi definita dalla seguente relazione:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \; .$$

Può darsi che, pur non esistendo il limite per **h** che tende a zero del rapporto incrementale, esista e sia finito tuttavia il limite a desta o il limite a sinistra, questi si chiameranno allora, rispettivamente, **derivata destra** e **derivata sinistra** della funzione $y = f(x)$ in x_0, e si rappresenteranno con i simboli $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, si ha quindi, per definizione:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \; .$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA

Partendo dal significato geometrico del rapporto incrementale e osservando che al tendere di **h** a zero, il punto **Q** tende a **P** e la retta **secante** , passante per i punti **P** e **Q** , tende a disporsi **tangente** alla curva nel punto **P**, si può affermare che:

la derivata di una funzione in un suo punto è uguale al coefficiente angolare della tangente alla curva in quel punto.

Graficamente si ha:

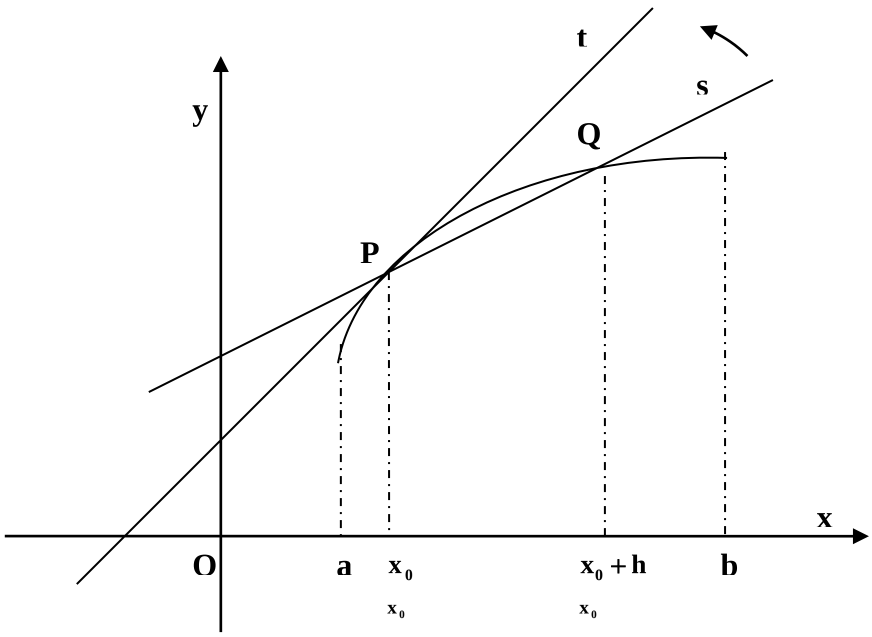

Figura 2

[Visualizzazione grafica]

CENNI STORICI

Il concetto di derivata di una funzione di una variabile è uno dei più importanti e fecondi della Matematica, ed è quello su cui si basa il calcolo differenziale. Tracce di questo calcolo si riscontano presso gli antichi geometri, specialmente in Archimede (matematico e fisico siracusano: 287 a.C. – 212 a.C.), ma come fondatori si devono considerare Newton (inglese: 1642-1727) e Leibniz (tedesco: 1646-1716) i quali, indipendentemente l'uno dall'altro, vi pervennero nel secolo XVII.

Torna su