

Siano m e n con $m > n$ le misure delle parti in cui risulta diviso il segmento PQ , inoltre, con la condizione che sussista la seguente proporzione

$$(m + n) : m = m : n$$

Cioè m è il medio proporzionale tra la misura del segmento, ossia $m + n$ e la sua parte minore n . Poiché la proporzione è l'uguaglianza tra due rapporti ha senso scrivere

$$\frac{m + n}{m} = \frac{m}{n}$$

L'uguaglianza suddetta può essere espressa nel seguente modo

$$\frac{m}{m} + \frac{n}{m} = \frac{m}{n}$$

cioè

$$1 + \frac{n}{m} = \frac{m}{n}$$

Ponendo

$$\frac{m}{n} = \varphi$$

ed osservando che

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{\varphi}$$

allora andando a sostituire nella relazione precedente si ottiene

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$$

Moltiplicando ambo i membri per φ si ottiene l'equazione nella variabile φ

$$\varphi + 1 = \varphi^2$$

Scrivendo l'equazione di secondo grado nella sua forma canonica si ha

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Applicando la formula risolutiva si ottiene

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \rightarrow \varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \nearrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \searrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Ricordando che φ è il rapporto tra le misure delle parti in cui è stato diviso il segmento si esclude la soluzione negativa, pertanto, si ottiene

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \sim 1,6180$$

