[**Home page**](../index.htm)

[**Goniometria**](../trigonometria.htm)

**FORMULE DI PROSTAFERESI**

***Le formule di prostaferesi si utilizzano per trasformare la somma o la differenza di due seni o di due coseni in prodotti.***

$$sen p+sen q=2sen\frac{p+q}{2} cos\frac{p-q}{2}$$

$$sen p-sen q=2cos\frac{p+q}{2} sen\frac{p-q}{2}$$

$$cos p+cos q=2cos\frac{p+q}{2} cos\frac{p-q}{2}$$

$$cos p-cos q=-2sen\frac{p+q}{2} sen\frac{p-q}{2}$$

**Si vuole dimostrare la *prima regola*, pertanto, si considerano le seguenti formule di addizione e sottrazione per il seno**

$$sen\left(α+β\right)=senα cosβ+cosα senβ$$

$$sen\left(α-β\right)=senα cosβ-cosα senβ$$

***Addizionando* membro a membro si ha**

$$sen\left(α+β\right)+sen\left(α-β\right)=senα cosβ+senα cosβ+cosα senβ-cosα senβ$$

**Cioè**

$$sen\left(α+β\right)+sen\left(α-β\right)=2senα cosβ$$

**Ponendo**

$α+β=p $**e** $ α-β=q$

**si mettono a sistema le due relazioni per calcolare** $α$ **e** $β$ **in funzione di** $p$ **e** $q$

**Pertanto, ha senso scrivere**

$\left\{\begin{array}{c}α+β=p\\α-β=q\end{array}\right.$ **addizionando membro a membro si ha**

$$2α=p+q\rightarrow α=\frac{p+q}{2}$$

$\left\{\begin{array}{c}α+β=p\\α-β=q\end{array}\right.$ **sottraendo membro a membro si ha**

$$2β=p-q\rightarrow β=\frac{p-q}{2}$$

**Quindi andando a sostituire nella relazione**

$$sen\left(α+β\right)+sen\left(α-β\right)=2senα cosβ$$

**i valori trovati e le posizione fatte si ottiene la regola che si voleva dimostrare**

$$sen p+sen q=2sen\frac{p+q}{2} cos\frac{p-q}{2}$$

**Si vuole dimostrare la *seconda regola*, pertanto, si considerano le seguenti formule di addizione e sottrazione per il seno**

$$sen\left(α+β\right)=senα cosβ+cosα senβ$$

$$sen\left(α-β\right)=senα cosβ-cosα senβ$$

***Sottraendo* membro a membro si ha**

$$sen\left(α+β\right)-sen\left(α-β\right)=senα cosβ-senα cosβ+cosα senβ+cosα senβ$$

**Cioè**

$$sen\left(α+β\right)-sen\left(α-β\right)=2cosα senβ$$

**Ponendo**

$α+β=p $**e** $ α-β=q$

**si mettono a sistema le due relazioni per calcolare** $α$ **e** $β$ **in funzione di** $p$ **e** $q$

**Pertanto, ha senso scrivere**

$\left\{\begin{array}{c}α+β=p\\α-β=q\end{array}\right.$ **addizionando membro a membro si ha**

$$2α=p+q\rightarrow α=\frac{p+q}{2}$$

$\left\{\begin{array}{c}α+β=p\\α-β=q\end{array}\right.$ **sottraendo membro a membro si ha**

$$2β=p-q\rightarrow β=\frac{p-q}{2}$$

**Quindi andando a sostituire nella relazione**

$$sen\left(α+β\right)-sen\left(α-β\right)=2cosα senβ$$

**i valori trovati e le posizione fatte si ottiene la seconda regola che si voleva dimostrare**

$$sen p-sen q=2cos\frac{p+q}{2} sen\frac{p-q}{2}$$

***Analogamente si procede per dimostrare le altre due regole utilizzando le formule di addizione e sottrazione per il coseno.***

**ESERCIZI SVOLTI APPLICANDO LE FORMULE DI PROSTAFERESI**

**ESERCIZIO N°1**

***Calcolare*** $sen 285°+ sen 15°$

**Si applica la regola**

$$sen p+sen q=2sen\frac{p+q}{2} cos\frac{p-q}{2}$$

**Pertanto, se** $p=285° $ **e** $q=15°$ **si ha**

$$sen 285°+sen 15°=2sen\frac{285°+15°}{2} cos\frac{285°-15°}{2} $$

**Cioè**

$$sen 285°+sen 15°=2sen\frac{300°}{2} cos\frac{270°}{2}=2sen 150°cos 135°$$

**E osservando che**

$$sen 150°=sen 30°=\frac{1}{2}$$

**e**

$$cos 135°=-cos 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Si ha**

$$sen 285°+sen 15°=2×\frac{1}{2}×\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**ESERCIZIO N°2**

***Calcolare*** $cos 285°- cos 15°$

**Si applica la regola**

$$cos p-cos q=-2sen\frac{p+q}{2} sen\frac{p-q}{2}$$

**Pertanto, se** $p=285° $ **e** $q=15°$ **si ha**

$$cos 285°-cos 15°=-2sen\frac{285°+15°}{2} sen\frac{285°-15°}{2} $$

**Cioè**

$$cos 285°-cos 15°=-2sen\frac{300°}{2} sen\frac{270°}{2}=-2sen 150°sen 135°$$

**E osservando che**

$$sen 150°=sen 30°=\frac{1}{2}$$

**e**

$$sen 135°=sen 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Si ha**

$$cos 285°-cos 15°=-2×\frac{1}{2}×\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**ESERCIZIO N°3**

***Calcolare*** $sen 135°- sen 15°$

**Si applica la regola**

$$sen p-sen q=2cos\frac{p+q}{2} sen\frac{p-q}{2}$$

**Pertanto, se** $p=135° $ **e** $q=15°$ **si ha**

$$sen 135°-sen 15°=2cos\frac{135°+15°}{2} sen\frac{135°-15°}{2} $$

**Cioè**

$$sen 135°-sen 15°=2cos\frac{150°}{2} sen\frac{120°}{2}=2cos 75°sen 60°$$

**E osservando che**

$$cos 75°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

**e**

$$sen 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Si ha**

$$sen 285°-sen 15°=2×\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}×\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{4}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$