[**Home page**](../index.htm)

[**Goniometria**](../trigonometria.htm)

**LE FORMULE DI BISEZIONE**

**DIMOSTRAZIONE**

**Ricordando la formula di duplicazione per il coseno di un angolo, ossia**

$$cos 2β=cos^{2}β-sen^{2}β=1-2sen^{2}β$$

**Ponendo**

$$2β=α si ricava che β=\frac{α}{2}$$

**Pertanto, sostituendo ha senso scrivere**

$$cos α=1-2sen^{2}\frac{α}{2}$$

**Cioè**

$$2sen^{2}\frac{α}{2}=1-cos α\rightarrow sen^{2}\frac{α}{2}=\frac{1-cos α}{2}$$

**Estraendo ambo i membri la radice quadrata si ottiene**

$$sen \frac{α}{2}=\pm \sqrt{\frac{1-cos α}{2}}$$

**Ossia la formula di bisezione per il seno di un angolo.**$ $

**Analogamente ricordando la formula di duplicazione per il coseno di un angolo**

$$cos 2β=cos^{2}β-sen^{2}β=2cos^{2}β-1$$

**Ponendo**

$$2β=α si ricava che β=\frac{α}{2}$$

**Pertanto, sostituendo ha senso scrivere**

$$cos α=2cos^{2}\frac{α}{2}-1$$

**Cioè**

$$2cos^{2}\frac{α}{2}=1+cos α\rightarrow cos^{2}\frac{α}{2}=\frac{1+cos α}{2}$$

**Estraendo ambo i membri la radice quadrata si ottiene**

$$cos \frac{α}{2}=\pm \sqrt{\frac{1+cos α}{2}}$$

**Ossia la formula di bisezione per il coseno di un angolo.**

**Osservazioni**

**Per determinare la formula di bisezione per la tangente di un angolo, si utilizza la seconda relazione fondamentale della goniometria**

$$tg \frac{α}{2}=\frac{sen \frac{α}{2}}{cos \frac{α}{2}}$$

**E sostituendo le regole suddette di bisezione per il seno e per il coseno ha senso scrivere**

$$tg \frac{α}{2}=\pm \sqrt{\frac{1-cos α}{2} } : \sqrt{\frac{1+cos α}{2}}$$

**Ossia**

$$tg \frac{α}{2}=\pm \sqrt{\frac{1-cos α}{1+cos α} }con α\ne π+2kπ$$

**Per determinare la formula di bisezione per la cotangente di un angolo, si utilizza la terza relazione fondamentale della goniometria**

$$ctg \frac{α}{2}=\frac{cos \frac{α}{2}}{sen \frac{α}{2}}=\frac{1}{tg \frac{α}{2}}$$

**Pertanto, si ha**

$$ctg \frac{α}{2}=\pm \sqrt{\frac{1+cos α}{1-cos α} }con α\ne 2kπ$$

**Le formule di bisezione per la tangente e per la cotangente si possono scrivere sotto forma razionale:**

$$tg \frac{α}{2}=\frac{1-cos α }{sen α} con α\ne 2kπ oppure tg \frac{α}{2}=\frac{sens α }{1+cos α} con α\ne π+2kπ$$

$ $**e**

$$ctg \frac{α}{2}=\frac{1+cos α }{sen α} con α\ne 2kπ oppure ctg \frac{α}{2}=\frac{sens α }{1-cos α} con α\ne 2kπ$$

**ESERCIZIO N°1**

***Calcolare il valore del coseno dell’angolo di ampiezza 22° 30'***

**Osservando che**

$$\begin{matrix}\\22° 30'=\frac{45°}{2}\end{matrix}$$

**e sapendo che la formula di bisezione per il coseno di un angolo è**

$$cos \frac{α}{2}=\pm \sqrt{\frac{1+cos α}{2}}$$

**Ha senso scrivere**

$$cos \frac{45°}{2}=\sqrt{\frac{1+cos 45°}{2}}$$

**Ossia**

$$cos 22° 30^{'}=cos \frac{45°}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

**ESERCIZIO N°2**

***Calcolare il valore del seno dell’angolo di ampiezza 157° 30'***

**Applicando una regola degli angoli associati si ha**

$$\begin{matrix}\\sen 157° 30^{'}=sen\left(180-22° 30^{'}\right)=sen 22° 30^{'}=sen\frac{45°}{2}\end{matrix}$$

**e sapendo che la formula di bisezione per il seno di un angolo è**

$$sen \frac{α}{2}=\pm \sqrt{\frac{1-cos α}{2}}$$

**Ha senso scrivere**

$$sen 157° 30^{'}=sen \frac{45°}{2}=\sqrt{\frac{1-cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

**Osservazioni**

**Essendo** $22° 30^{'}$ **e** $67° 30^{'}$ **angoli complementari si ottiene che**

$$cos 22° 30^{'}=sen 67° 30^{'}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

**e**

$$sen 22° 30^{'}=cos 67° 30^{'}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

**Mentre**

$$tg 22° 30^{'}=\frac{sen 22° 30^{'}}{cos 22° 30^{'}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} :\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} $$

**Ossia**

$$tg 22° 30^{'}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2)}^{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}==\frac{(2-\sqrt{2})×\sqrt{2}}{\sqrt{2}×\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2}=\sqrt{2}-1$$

**Inoltre**

$$tg 22° 30^{'}=ctg 67° 30^{'}=\sqrt{2}-1$$

**e**

$$ctg 22° 30^{'}=tg 67° 30^{'}=\sqrt{2}+1$$