[**Home page**](../index.htm)

[**Goniometria**](../trigonometria.htm)

**FORMULE DI WERNER**

***Le formule di Werner si utilizzano per trasformare in una somma o in una differenza di coseni o di seni il prodotto di un seno per un coseno oppure di due coseni o di due seni.***

$$sen α cos β=\frac{1}{2}\left[sen\left(α+β\right)+sen\left(α-β\right)\right]$$

$$cos α cos β=\frac{1}{2}\left[cos\left(α+β\right)+cos\left(α-β\right)\right]$$

$$sen α sen β=-\frac{1}{2}\left[cos\left(α+β\right)-cos\left(α-β\right)\right]$$

**Si vuole dimostrare la *prima regola*, pertanto, si considerano le seguenti formule di addizione e sottrazione per il seno**

$$sen\left(α+β\right)=senα cosβ+cosα senβ$$

$$sen\left(α-β\right)=senα cosβ-cosα senβ$$

***Addizionando* membro a membro si ha**

$$sen\left(α+β\right)+sen\left(α-β\right)=senα cosβ+senα cosβ+cosα senβ-cosα senβ$$

**Cioè**

$$sen\left(α+β\right)+sen\left(α-β\right)=2senα cosβ$$

**Ossia invertendo i membri si ottiene**

$$2senα cosβ=sen\left(α+β\right)+sen\left(α-β\right)$$

**E dividendo ambo i membri per** $2$

$$\frac{2senα cosβ}{2}=\frac{sen\left(α+β\right)+sen\left(α-β\right)}{2}$$

**si trova la *prima regola*.**

***Analogamente si procede per dimostrare le altre due regole utilizzando le formule di addizione e sottrazione per il coseno.***

**Johann Werner matematico tedesco del XI secolo.**

**ESERCIZI SVOLTI APPLICANDO LE FORMULE DI WERNER**

**ESERCIZIO N°1**

***Calcolare*** $sen 75° cos 15°$

**Si applica la regola**

$$sen α cos β=\frac{1}{2}\left[sen\left(α+β\right)+sen\left(α-β\right)\right]$$

**Pertanto, se** $α=75° $ **e** $β=15°$ **si ha**

$$sen 75° cos 15°=\frac{1}{2}\left[sen\left(75°+15°\right)+sen\left(75°-15°\right)\right]$$

**Cioè**

$$sen 75° cos 15°=\frac{1}{2}\left[sen 90°+sen 60°\right]=\frac{1}{2}×\left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

**ESERCIZIO N°2**

***Calcolare***$ sen 105° sen 15°$

**Si applica la regola**

$$sen α sen β=-\frac{1}{2}\left[cos\left(α+β\right)-cos\left(α-β\right)\right]$$

**Pertanto, se** $α=105° $ **e** $β=15°$ **si ha**

$$sen 105° sen 15°=-\frac{1}{2}\left[cos\left(105°+15°\right)-cos\left(105°-15°\right)\right]$$

**Cioè**

$$sen 105° sen 15°=-\frac{1}{2}\left[cos 120°-cos 90°\right]$$

**Ricordando che per gli archi associati si ha**

$$cos 120°=cos\left(180°-60°\right)=-cos60°=-\frac{1}{2}$$

**e sapendo che** $cos 90°=0$

**Sostituendo si ottiene**

$$sen 105° sen 15°=-\frac{1}{2}×\left[-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}$$