ESERCIZI SULLE DERIVATE

1) Calcolare, nel punto di ascissa $x_o = 3$, la derivata della funzione $y = 5x$, servendosi della sola definizione di derivata.

Si ricorda la definizione di derivata in un punto:

La derivata della funzione $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 è il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale della funzione al tendere a zero dell'incremento h della variabile,

ossia:

$$f'(x_o) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ .$$

Pertanto, si ha**:**

$f(x) = 5x$

$f(x_o) = f(3) = 15$

$f(x_o + h) = f(3+h) = 5(3+h) = 15 + 5h$

Quindi, sostituendo nel limite, si ottiene:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{15 + 5h - 15}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h} = 5 \ .$$

2) Calcolare, nel punto di ascissa $x_o = 4$, la derivata della funzione $y = x^2$, servendosi della sola definizione di derivata.

Pertanto, si ha**:**

$f(x) = x^2$

$f(x_o) = f(4) = 16$

$f(x_o + h) = f(4+h) = (4+h)^2 = 16 + h^2 + 8h$

Quindi, per la definizione di derivata in un punto, si ottiene:

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{16 + h^2 + 8h - 16}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 8h}{h} = \lim_{h\to o} \frac{h(h+8)}{h} = \lim_{h\to o} (h+8) = 8$$

3) Calcolare, nel punto di ascissa $x_o = 1$, la derivata della funzione $y = x^2 - 4$, servendosi della sola definizione di derivata. Interpretare geometricamente l'esercizio.

Pertanto, si ha**:**

$\mathbf{f(x) = x^2 - 4}$

$\mathbf{f(x_o) = f(1) = 1 - 4 = -3}$

$\mathbf{f(x_o + h) = f(1+h) = (1+h)^2 - 4 = 1 + h^2 + 2h - 4 = h^2 + 2h - 3}$

Quindi, per la definizione di derivata in un punto, si ottiene:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h - 3 - (-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to o} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h\to o}(h+2) = 2$$

Il valore 2 è il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola di equazione $y = x^2 - 4$ nel punto di tangenza $T(1;-3)$.

1° metodo:

Per trovare l'equazione della retta tangente nel punto di tangenza si può applicare la regola dello sdoppiamento all'equazione della curva, cioè:

$$\frac{y + y_0}{2} = xx_0 - 4$$

dove x_0 e y_0 sono le coordinate del punto di tangenza, pertanto, sostituendo si ottiene:

$$\frac{y - 3}{2} = x - 4 \ ,$$

ossia:

$$y = 2x - 5 \ ,$$

che è l'equazione della retta tangente, avente come coefficiente angolare il valore 2.

2° metodo:

Oppure, si perviene alla stessa conclusione, utilizzando la formula per trovare l'equazione della retta, conoscendo le coordinate del punto di tangenza e il coefficiente angolare, cioè:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \ ,$$

ossia:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \ .$$

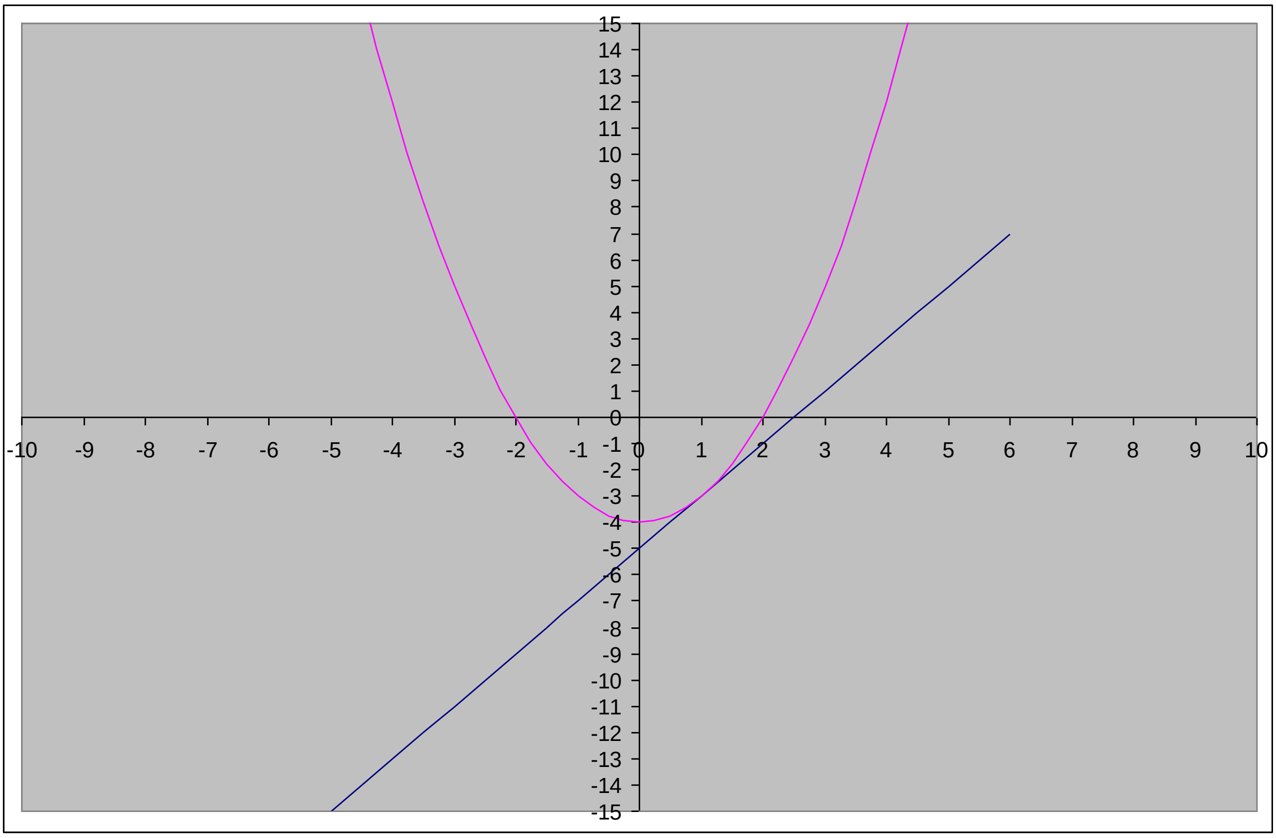
Sostituendo $x_0 = 1$, $y_0 = f(x_0) = f(1) = -3$ e $m = f'(x_0) = f'(1) = 2$, si ottiene:

$$y + 3 = 2(x - 1)$$

cioè:

$$\mathbf{y = 2x - 5}.$$

Graficamente si ha:



(Vedi anche relativo programma in Excel)

4) Calcolare, nel punto di ascissa $\mathbf{x_o = 1}$, la derivata della funzione $\mathbf{y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5}$, servendosi della sola definizione di derivata. Interpretare geometricamente l'esercizio.

Pertanto, si ha**:**

$\mathbf{f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5}$

$\mathbf{f(x_o) = f(1) = 1 + 2 - 4 + 5 = 4}$

$\mathbf{f(x_o + h) = f(1+h) = (1+h)^3 + 2(1+h)^2 - 4(1+h) + 5}$,

ossia:

$\mathbf{f(1+h) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 + 2 + 2h^2 + 4h - 4 - 4h + 5 = h^3 + 5h^2 + 3h + 4}$

Quindi, per la definizione di derivata in un punto, si ottiene:

$$\mathbf{f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 + 5h^2 + 3h + 4 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h^2 + 5h + 3)}{h} = \lim_{h\to o} (h^2 + 5h + 3) = 3}$$

Il valore 3 è il coefficiente angolare della retta tangente alla cubica di equazione $\mathbf{y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5}$ nel punto di tangenza $\mathbf{T(1;4)}$.

La formula per trovare l'equazione della retta, conoscendo le coordinate del punto di tangenza e il coefficiente angolare, è:

$$\mathbf{y - y_0 = m(x - x_0)},$$

ossia:

$$\mathbf{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}.$$

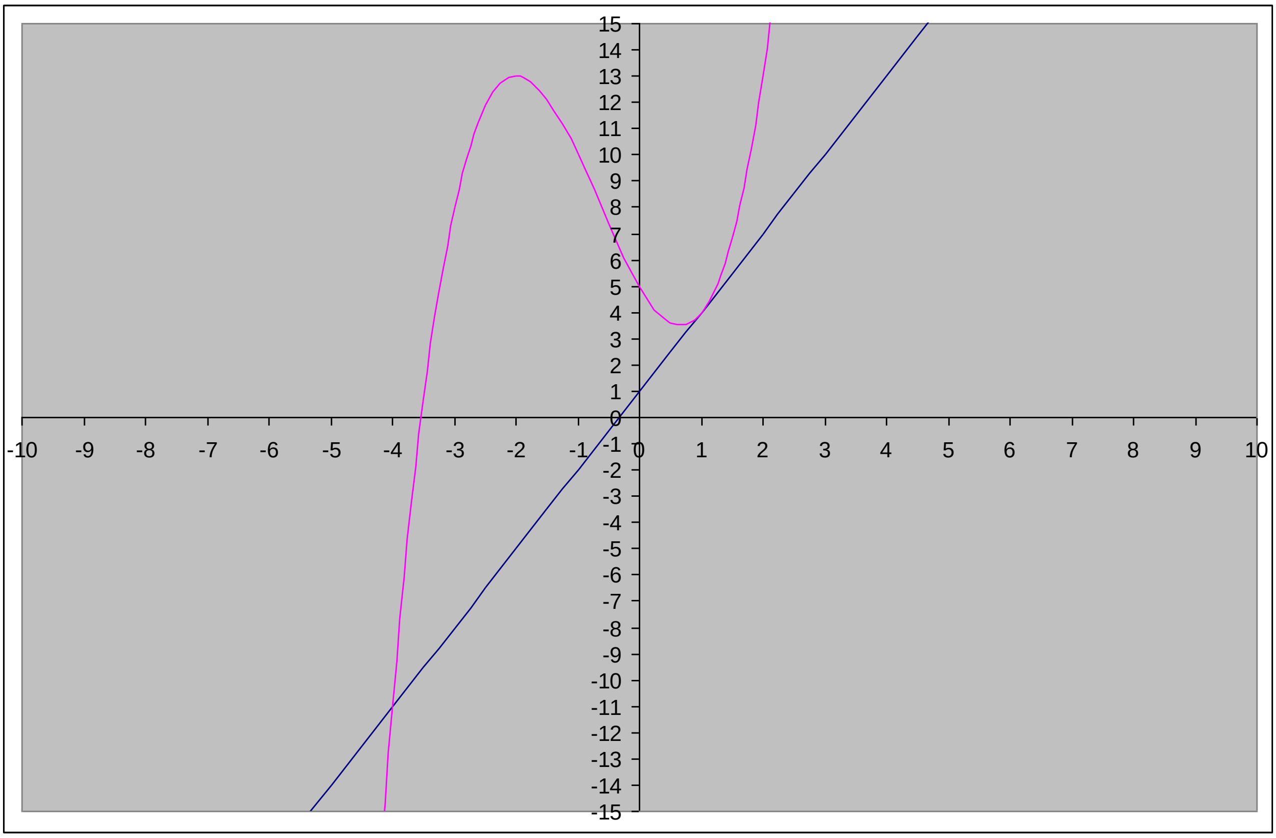
Sapendo che $\mathbf{x_0 = 1}$, $\mathbf{y_0 = f(x_0) = f(1) = 4}$ e $\mathbf{m = f'(x_0) = f'(1) = 3}$, si ottiene:

$$\mathbf{y - 4 = 3(x - 1)}$$

cioè:

$$\mathbf{y = 3x + 1}.$$

Graficamente si ha:



(vedi anche relativo programma in Excel)

Argomento correlato: derivabilità di una funzione

Torna su