

Logica matematica

Introduzione alla Logica matematica

La logica matematica studia la coerenza e la correttezza del ragionamento, affinché si possa stabilire se un discorso logico sia una tautologia, ossia un'affermazione vera per qualsiasi valore di verità degli elementi che la compongono e non si cada nel ragionamento in una contraddizione, ossia in un'affermazione sempre falsa.

- **Proposizione Atomica (Semplice):** Si definisce così una frase ben formata nel linguaggio naturale alla quale si può attribuire un valore di verità o falsità.

- **Esempio di proposizione atomica:** "Oggi piove." È una frase ben formata nel linguaggio naturale per la quale si può stabilire se è vera (V) o falsa (F)

- **Esempio non logico:** "La mamma è bella." È una frase ben formata nel linguaggio naturale, ma priva di logicità, perché essendo la bellezza soggettiva e non quantificabile, non si può attribuire alla frase un valore di verità o falsità.

- **Proposizione Molecolare (Composta):** Si definisce così una frase composta da una o più proposizioni atomiche collegate tra loro da parole, locuzione avverbiali o espressioni, questi collegamenti vengono chiamati **connettivi**.

I Connettivi Logici e le Tabelle di Verità

I connettivi permettono di combinare proposizioni atomiche per calcolarne il valore di verità complessivo.

La Congiunzione ($\wedge$, "e", "and", "et")

- **Esempio:** "Ho i semi e ho la terra".

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La proposizione molecolare è vera solo se entrambe le atomiche sono vere.

La Disgiunzione Inclusiva (V, "o", "vel", "or")

- **Esempio:** "La porta è aperta o ho le chiavi".

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La proposizione è falsa solo se entrambe le atomiche sono false.

Basta che una proposizione atomica sia vera affinché la proposizione molecolare sia vera.

L'Implicazione ($\rightarrow$; "se... allora"; "if ...then")

- **Esempio:** "Se piove allora apro l'ombrello".

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Indica una relazione condizionale dove, verificandosi l'evento **p**(antecedente), si determina la conseguenza **q** (conseguente).

L'operazione logica tipica dei teoremi (**$p \rightarrow q$**), dove p è l'ipotesi e q la tesi.

È falsa solo quando l'ipotesi è vera ma la tesi è falsa.

La Negazione ($\bar{p}$ oppure $\neg p$; “non p” ; “not p”)

L'operazione logica di negazione inverte il valore di verità, ossia se p è V allora $\bar{p}$ è F.

Tautologie e Contraddizioni

- **Tautologia:** Una proposizione che risulta sempre vera, qualunque siano i valori di verità delle sue componenti.

- **Esempio:** $p \vee \bar{p}$ (“Piove o non piove”).

Questo è il principio del **Tertium non datur** (il terzo è escluso).

- **Contraddizione:** Una proposizione che risulta sempre falsa.

- **Esempio:** $p \wedge \bar{p}$ (“Piove e non piove”).

Osservazione: La negazione della proposizione molecolare $p \wedge \bar{p}$ è una Tautologia

- **Esempio:** $\overline{p \wedge \bar{p}}$ (“Non è vero che piove e non piove”). Principio di non Contraddizione.

Equivalenza Logica

Due proposizioni si dicono tautologicamente equivalenti se hanno la stessa tavola di verità.

Esercizio: Verificare che $\bar{p} \wedge \bar{q}$ è equivalente tautologicamente ($\leftrightarrow$) alla proposizione $\overline{p \vee q}$

		↓			↓	
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V

Conclusione:

Poiché le colonne evidenziate sono identiche, le due proposizioni molecolari sono tautologicamente equivalenti.