[**Home page**](index.htm)

[**Goniometria**](trigonometria.htm)

**FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI SPECIALI**

**Gli angoli di 30° e 60°**

Rispetto ad una circonferenza goniometrica, consideriamo l’arco $\hat{AP}$ di ampiezza $\frac{π}{3}$ $ \left(60°\right)$ e congiungiamo l’estremo libero dell’arco *P* con il centro *O* degli assi cartesiani e con il punto *A*, origine dell’arco, pertanto $P\hat{O}A=60°$.



Come si nota in figura il triangolo *OAP* è equilatero, infatti il lato *OP* è uguale al lato *OA* essendo raggi della stessa circonferenza, ciò implica che gli angoli $O\hat{A}P$ e $A\hat{P}O$ sono uguali, ma sapendo che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale ad un angolo piatto si ha

$$O\hat{A}P+ A\hat{P}O+P\hat{O}A=180°$$

Cioè $2A\hat{P}O+60°=180°\rightarrow 2A\hat{P}O=120°\rightarrow A\hat{P}O=60°$ $ e quindi anche O\hat{A}P=60°$

Quindi il triangolo *OAP* è equiangolo e di conseguenza è equilatero.

Tracciando nel triangolo *OAP* l’altezza *HP* relativa al lato *OA* siha la seguente figura:

**

e sapendo che in un triangolo equilatero l’altezza relativa ad un lato è anche mediana si ottiene

$\overbar{OH}=\overbar{HA}= \frac{1}{2}\overbar{OA}$ ed essendo $\overbar{OA}=1$ si ottiene $\overbar{OH}=\overbar{HA}=$ $\frac{1}{2}$

Inoltre, sapendo che in un triangolo equilatero l’altezza relativa ad un lato è anche bisettrice si ha

$$A\hat{P}H= H\hat{P}O=\frac{1}{2} A\hat{P}O=\frac{1}{2}60°=30°$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *OHP* si può scrivere

$$\overbar{OP}^{2}=\overbar{OH}^{2}+\overbar{HP}^{2}$$

Calcolando il cateto maggiore *HP* si ottiene:

$$\overbar{HP}=\sqrt{\overbar{OP}^{2}-\overbar{OH}^{2}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{4-1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}^{}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pertanto, per definizione di seno si ha

$\overbar{HP}=sen\frac{π}{3}$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$cioè $sen60°$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

 e per definizione di coseno si ha

$\overbar{OH}=cos\frac{π}{3}$$=\frac{1}{2} $cioè$ cos60°$$=\frac{1}{2}$



*Osservazione:*

Analogamente si può dimostrare che

$sen\frac{π}{6}$$=\frac{1}{2}$e$cos\frac{π}{6}$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$ cioè $sen30°$$=\frac{1}{2}$e$cos30°$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **.**

**FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI SPECIALI**

**L’angolo di 45°**

Rispetto ad una circonferenza goniometrica, consideriamo l’arco $\hat{AP}$ di ampiezza $\frac{π}{4}$ $ \left(45°\right)$ e congiungiamo l’estremo libero dell’arco *P* con il centro *O* degli assi cartesiani, inoltre sia *H* la proiezione del punto *P* sull’asse delle ascisse, pertanto $P\hat{O}H=45°$.

****

Come si nota in figura il triangolo *OHP* è rettangolo ed isoscele, infatti

$O\hat{H}P=90° , P\hat{O}H=H\hat{P}O=45°$ ,

in virtù del Teorema di Pitagora si ha

$$\overbar{OP}^{2}=\overbar{OH}^{2}+\overbar{HP}^{2}$$

Ed essendo i cateti uguali, cioè $\overbar{HP}=\overbar{OH} $si può scrivere

$$\overbar{OP}^{2}=2\overbar{OH}^{2}$$

Di conseguenza sapendo che $\overbar{OP}=1$ poiché raggio della circonferenza si ottiene

$$2\overbar{OH}^{2}=1\rightarrow \overbar{OH}^{2}=\frac{1}{2}\rightarrow \overbar{OH}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pertanto, per definizione di seno si ha

$\overbar{HP}=sen\frac{π}{4}$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$cioè $sen45°$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

 e per definizione di coseno si ha

$\overbar{OH}=cos\frac{π}{4}$$=\frac{\sqrt{2}}{2} $cioè$ cos45°$$=\frac{\sqrt{2}}{2} $ **.**